Sonder-Abdruck aus „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften". 1916. No. 5.

Ueber merkwürdige Mineralien und eine neue Methode der spezifischen Gewichtsbestimmung.

Mit Bemerkungen über stereometrische und kristallographische Aufgaben.

Von Dr. Julius Ruska, a. o. Professor an der Universität Heidelberg.

Bis vor kurzem glaubte ich zu wissen, daß die mancherlei Spielarten des Quarzes, wie sie in den Schulbüchern aufgezählt werden, bei aller Verschiedenheit hinsichtlich Farbe, Durchsichtigkeit, Größe und Gesamtform doch in dem einen Punkt übereinstimmen, daß die Flächen der pyramidalen Enden gegeneinander und gegen das Prisma stets die gleiche Neigung besitzen. Ich war in dieser Meinung bestärkt worden durch den Umstand, daß alle mir bekannt gewordenen Mineralogielehrbücher das Gleiche behaupteten und manche sogar diese Winkel, oder wenigstens die Winkel zwischen benachbarten Flächennormalen auf Minuten genau angaben. Auch hatte ich mich mit Hilfe eines Anlegegoniometers, mit dem ich einige in meinem Besitze befindliche Bergkristalle durchprobierte, überzeugt, daß es mit der Sache wohl seine Richtigkeit haben müsse; denn meine Messungen, die natürlich nur angenähert stimmen konnten, da allerhand Unebenheiten an den Kristallen und meine eigene Ungeschicklichkeit die Ergebnisse beeinträchtigten, kamen bis auf etwa einen halben Grad im Durchschnitt mit jenen Angaben überein. Als ich Gelegenheit fand, mit einem vollkommeneren Instrument, einem Reflexionsgoniometer mit horizontalem Teilkreis, an einem von spiegelglatten Flächen begrenzten Bergkriställchen die Winkel zu messen, ergab sich dann auch Uebereinstimmung bis auf Minuten. Endlich hatte ich durch Nachforschungen in alten Büchern, womit ich gelegentlich meine Mußestunden ausfüllte, in Erfahrung gebracht, daß die Bergkristalle auch schon früher jene Grundeigenschaft besaßen. Insbesondere fand ich, daß einer jener naturkundigen Aerzte, die das 17. Jahrhundert hervorbrachte, schon mit aller Bestimmtheit auf Grund seiner genauen Untersuchungen an zahlreichen Bergkristallen behauptete, daß bei allem Wechsel in der Form der Begrenzungsflächen die Winkel der Pyramiden die gleichen blieben.[1] Wie erstaunt war ich daher, als ich beim Nachsuchen in einigen Sammlungen Bergkristalle entdeckte, die mit allen bisherigen Erfahrungen in Widerspruch standen, ja geradezu als Paradoxien der Natur bezeichnet werden mußten!

Allerdings waren diese Sammlungen keine **Mineraliensammlungen**; denn in solchen hätte ich auf der ganzen Welt keine andern Bergkristalle entdecken können,

[1] Nicolai Stenonis de Solido intra Solidum naturaliter contento Dissertationis Prodromus ad Serenissimum Ferdinandum II. Magnum Etruriae Ducem. Florentiae MDCLXIX. — Die Abhandlung gehört auch zu denen, die mehr zitiert als gelesen werden. Sie umfaßt samt Einleitung 76 Seiten Quart und enthält gegenüber S. 72 die Figurentafel, der die Nachbildungen bei v. Kobell S. 18 und Dannemann II S. 298 entstammen. Die dankenswerte Darstellung bei Dannemann ist nach einem von Élie de Beaumont 1832 in den Annales des sciences naturelles (XXV S. 337) veröffentlichten Auszug gemacht; bei v. Kobell finden sich einige Zitate nach dem Original. Es wäre an der Zeit, diese seltene Schrift durch die Herausgabe einer guten deutschen Uebersetzung wieder allgemein zugänglich zu machen, zumal sie für die Entwicklung der Geologie ebenso grundlegend ist (K. A. v. Zittel, Geschichte der Geologie, S. 32 ff). Merkwürdigerweise sind die durch v. Kobell (oder schon von Élie de Beaumont?) ausgewählten Figuren gerade die, auf die es nicht so sehr ankommt. Ich setze die richtigen in einer auf Genauigkeit keinen Anspruch machenden Nachzeichnung hierher, indem ich den erläuternden Text nach dem Original beifüge:

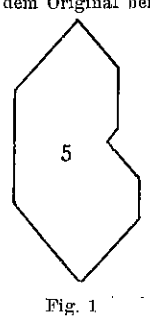

Fig. 1

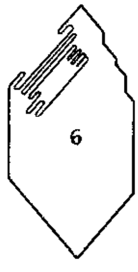

Fig. 2

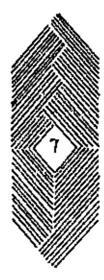

Fig. 3

als die schon von Steno charakterisierten. Die Sammlungen, in denen ich jene seltenen Steine entdeckte, waren **Aufgabensammlungen** zur Trigonometrie und Stereometrie, darunter solche, die im Vorwort noch besonders darauf aufmerksam machen, wie wichtig ihnen die Anwendungen naturwissenschaftlicher Tatsachen und Gesetze seien, und wie sehr sie auf die neuen Lehrpläne zugeschnitten seien, die eine Konzentration des Unterrichts verlangen.

Ich habe nun, einmal aufmerksam geworden, auch nach andern merkwürdigen Steinen gesucht und sie in ein Konzentrationslager zusammengebracht. Die Ausbeute war recht befriedigend, und ich möchte einige besonders schöne Exemplare den Mathematikern, Physikern und Chemikern an unsern höheren Schulen zur näheren Betrachtung vorlegen.

Nummer 1 ist ein Bergkristall. Er hat die Form einer regelmäßig-sechsseitigen Säule mit aufgesetzten geraden Pyramiden. Seine Grundkante mißt 1,75 cm, seine Seitenkante 9 cm, seine Achse 11 cm: ein wunderbares Spiel der Natur, die sichs angelegen sein ließ, hier einmal genau nach dem Metermaß ihre Gebilde aufzubauen! Nur schade, daß sie sich dabei etwas Zwang antun mußte und das ganz unmögliche Achsenverhältnis $a:c = 1:0{,}57$ (in runden Zahlen) statt $10:11$ anwandte.

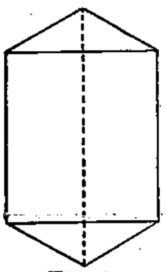

Fig. 6.

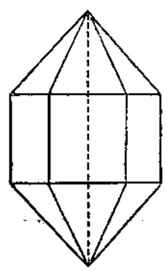

Fig. 7.

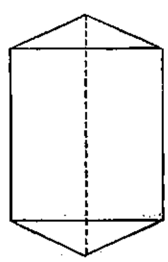

Fig. 8.

Die Bergkristalle Nummer 1 und 2, reduziert auf das gleiche Prisma; die Mittelfigur zeigt das richtige Achsenverhältnis.

Nummer 2 ist ebenfalls ein Bergkristall. Er hat etwas andere, aber auch genau metrische Dimensionen, nämlich eine Grundkante von 2 cm und eine Achse von 7 cm. Ich weiß nicht, warum der Entdecker dieses Exemplars, anstatt noch die Kante des Prismas zu messen und daraus die Höhe der Pyramide zu berechnen, es vorzog, den Kristall auf die Wage zu legen und sein Gewicht zu 160,8 g zu bestimmen. Oder sollte das gar ein Schwindel sein, und sollten wir mit der Vermutung Recht haben, daß dieses Gewicht lediglich dadurch zustande gekommen ist, daß der Verfasser das willkürlich angenommene Volumen 60 mit dem spezifischen Gewicht 2,68 multiplizierte? Wir werden, ob wir wollen oder nicht, zu dieser Annahme gezwungen, wenn wir bemerken, daß die Pyramide dieses merkwürdigen Quarzes die Höhe $x = 0{,}92$ cm hat, also auf ein noch unmöglicheres Achsenverhältnis $1:0{,}46$ führt. Nein, dieser Quarz ist weder gewogen noch gemessen worden, er ist ein Kunstprodukt, ein offenbarer Betrug.

Doch es kommt noch besser. Ein Bergkristall, Nummer 3, mit der Grundkante $a = 1{,}5$ cm, der zufällig genau so viel wiegt wie Nummer 2, hat außerdem noch die Eigenschaft, daß das Rechteck aus seiner Seitenkante und Höhe die Größe $F = 10\frac{2}{3}$ qcm besitzt! Hat man sich von dem Erstaunen über die ganz neuartigen Meßmethoden erholt und sich in das mathematische Problem vertieft — ein Stern vor der Aufgabe weist schon darauf hin, daß wir was Besonderes erwarten dürfen — so stellt es sich in Form der Gleichung

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\left(\frac{F}{x} + \frac{2x}{3}\right) = \frac{G}{s},$$

oder nach Einsetzung der Zahlenwerte und einigen einfachen Reduktionen in der Form der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{80\sqrt{3}}{9}x = -16$$

dar. O Wunder! wir erhalten die Wurzelwerte $x_1 = 14{,}275$ cm und $x_2 = 1{,}121$ cm, dazu die Kanten

$$y_1 = \frac{32}{3x_1} = 0{,}747 \text{ cm}$$

und

$$y_2 = \frac{32}{3x_2} = 9{,}517 \text{ cm}.$$

Dieser Zauberkristall stellt selbst den Karfunkel in Schatten, den Reineke dem Widder Bellyn gab, um ihn dem König Nobel zu überliefern. Er muß entweder gleichzeitig zwei verschiedene Achsenverhältnisse haben, nämlich

$$a:x_1 = 1:9{,}52 \text{ und } a:x_2 = 1:0{,}75$$

oder er erscheint dem Betrachter in verschiedener Gestalt, je nachdem er ihn etwa mit dem rechten oder linken Auge betrachtet. Denn daß wir hier zwei verschiedene Körper haben könnten, ist schon dadurch ausgeschlossen, daß in der Aufgabe nur von einem Rechteck aus der Seitenkante und Höhe und von einem Bergkristall die Rede ist. Nennen wir ihn also den Doppelquarz (Fig. 9).

Nummer 4 ist ein Schwefelkristall. Er besitzt wahrhaft phänomenale Dimensionen; selbst die weltberühmte Mineraliensammlung des k. k. Naturhistorischen Hofmuseums in Wien kann sich nicht eines solchen Exemplares rühmen. Er wiegt nicht weniger als

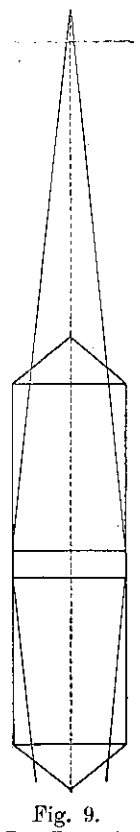

Fig. 9.
Der Doppelquarz.

5. et 6. figura ex illarum genere sunt, quas innumeras afferre potui ad euincendum, in plano axis laterum, et numerum, et longitudinem varie mutari non mutatis angulis, et in ipsa media crystallo cauitates varias relinqui, et varias lamellas formari. 7. Figura in plano axis indicat quomodo ex superimposita planis pyramidum noua materia crystallina laterum, et numerus, et longitudo varie modo augentur, modo imminuuntur . . .

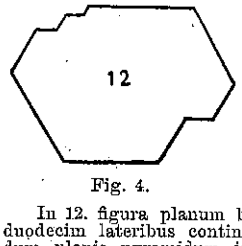

Fig. 4.

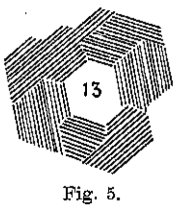

Fig. 5.

In 12. figura planum basis, quod hexagonum esse deberet, duodecim lateribus continetur. 13. Figura indicat, quomodo dum planis pyramidum imponitur nova materia crystallina, in plane basis laterum longitudo interdum, et numerus varie mutantur non mutatis angulis.

Die Tafel ist mitten zwischen Erörterungen über das Diluvium universale eingefügt; die Explicatio figurarum wird mit folgenden Worten eingeleitet: Cum praecipitatae scriptionis breuitas non pauca reliquerit minus clare exposita, praesertim vbi de angulatis corporibus, et terrae stratis agitur; vt qualecumque remedium isti malo adhiberem, e plurimis alijs selectas sequentes figuras hic subiungere constitui.

3840 g, also beinahe 4 Kilo, und hat dabei die exakte Form einer rhombischen Doppelpyramide mit der „Hauptachse" 24 cm und den Seitenkanten 20 cm bezw. 13 cm. Diese Eigenschaften machen ihn natürlich besonders geeignet zur Bestimmung des spezifischen Gewichts. Man braucht ja nur das auf der Küchenwage (die chemischen Wagen sind wohl nicht auf solche Lasten eingerichtet) bestimmte Gewicht durch das aus den Dimensionen berechnete Volumen zu dividieren, um den genauen Wert des Eigengewichts zu erhalten.

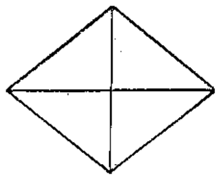

Fig. 10. Basischer Schnitt des natürlichen Schwefels.

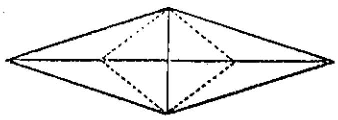

Fig. 11. Basischer Schnitt des pythagoreischen Schwefels.

Ich habe die Mühe nicht gescheut, aus den Seitenkanten und der halben „Hauptachse" $c = 12$ die beiden andern Halbachsen zu berechnen und fand

$$a = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}, \; b = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm},$$

also $$a : b : c = 5 : 16 : 12.$$

In den mineralogischen Werken findet man ganz andere Werte; dort gilt $a : b : c = 0{,}8130 : 1 : 1{,}9073$ oder rund $8 : 10 : 19$ als richtiges Achsenverhältnis, unser mathematischer Schwefel dagegen — man könnte ihn wegen der eigentümlichen Beziehungen zwischen Achsen und Kanten geradezu pythagoreischen Schwefel nennen — hat nicht nur andere Achsen, sondern auch ein ganz anderes spezifisches Gewicht als der natürliche Schwefel. Denn berechnet man das Volumen, indem man die Basis $2\,ab = 160$ mit $\frac{2}{3}\,c = 16$ multipliziert, und bildet man den Quotienten

$$G : V = 3840 : 1280,$$

so erhält man genau $s = 3$, während die Mineralogie- und Chemiebücher allgemein $s = 2$ angeben. Auch hier kann ich versichern, daß die Anwendung einer der sonst üblichen Methoden der spezifischen Gewichtsbestimmung (mit Quantitäten unter 1 kg) für den natürlichen Schwefel auf den Wert 2 bis 2,1 führt.

Genug des grausamen Spiels. Was würde man wohl zu Aufgaben sagen, in denen astronomische, geographische oder physikalische Konstanten in so unerhörter Weise behandelt würden? Ist der Kristallographie und Mineralogie gegenüber alles erlaubt? Ich muß gegen solchen Unfug den schärfsten Protest erheben, und den Rat geben, doch lieber auf „Anwendungen" aus diesen Gebieten zu verzichten, wenn man den Schülern nichts besseres vorzusetzen weiß als Beispiele, aus denen nur das eine klar hervorgeht, daß ihre Erfinder keine Ahnung von den Aufgaben der Kristallographie im allgemeinen und von kristallographischen Aufgaben im besondern haben.

Wie sachgemäße kristallographische Aufgaben beschaffen sein müßten, habe ich am Anfang dieser Studie angedeutet. Ich will darauf erst näher eingehen, wenn ich die Kritik der hier beigebrachten Fälle auch nach der stereometrischen Seite hin noch vervollständigt habe.

Wir fühlen uns erhaben über die Scholastiker, die darüber Untersuchungen anstellten, wie viele Engel auf einer Nadelspitze tanzen können. Wir halten uns für bessere Menschen, als die Philologen, die das Latein und Griechisch dazu mißbrauchen, um Stile schreiben zu lassen, die mit allerhand an den Haaren herbeigezogenen grammatischen Regeln gespickt sind. Aber ist das, was uns in den oben mitgeteilten Beispielen dargeboten wird, etwas anderes? Ist das nicht auch waschechte Scholastik? Werden nicht auch hier an sich schöne und wertvolle Anwendungsgebiete des mathematischen Unterrichts dazu mißbraucht, um von unnatürlichen Voraussetzungen aus noch unnatürlichere Ergebnisse zu errechnen?

Läßt man in der ersten Aufgabe die kristallographische Verkleidung fallen, so ist sie auch als rein stereometrische Aufgabe nicht einwandfrei. Man wird fragen können, wie denn im Ernstfall die Länge der Achse gemessen werden soll, oder wie man das Netz eines solchen Körpers aus den gegebenen Stücken zeichnen soll. Es ist klar, daß nur Kanten oder Winkel unmittelbar gemessen werden können; am natürlichsten wäre der Körper durch die drei Maßzahlen der Kanten bestimmt, die Pyramide könnte auch durch irgend einen Winkel definiert sein. Man wird vor allem darauf halten, daß die beiden Ausdrücke für die Volumina des Prismas und der Doppelpyramide klar erfaßt werden. Ist die Basis $Q = \frac{3\,a^2}{2}\sqrt{3}$ gefunden, und bezeichnet k die Prismenkante, h die Höhe der Pyramide, so wird

$$V = k \cdot Q + \frac{2\,h}{3}\,Q.$$

Aus solchem Volumen aber mit Hilfe irgend einer Zahl s, sei sie fingiert oder der Natur entlehnt, das Gewicht des Körpers zu berechnen, ist eine ziemlich müßige Arbeit. Man wird die Zeit besser verwendet haben, wenn man zeigt, wie man einen Körper genau wiegt, und wie man aus Wägungen usw. sein spezifisches Gewicht ableitet.

Wenn Nummer 2 wirklich gewogen wäre, könnte man sich zufrieden geben. In Wahrheit ist jene Angabe weiter nichts als die ganz überflüssige Umschreibung der Volumenzahl 60 durch $\frac{G}{s}$; mit der mathematischen Aufgabe als solcher hat das gar nichts zu tun.

Ein Meisterstück von Scholastik ist aber Nummer 3. Die mathematischen Bedingungen dieser Aufgabe sind ihrem Urheber ebensowenig klar gewesen wie ihre physikalische Unmöglichkeit. Er hätte wissen müssen, daß die Aufgabe ihrer Natur nach auf zwei verschiedene Lösungen führt, also physikalisch Unmögliches ergibt. Wie viel ansprechende und wirklich wertvolle Uebungen hätten sich aber an die Aufgabe knüpfen lassen, wenn sie, entlastet von allem unnötigen Beiwerk, auf ihre einfachste mathematische Form gebracht worden wäre! Sie hätte dann die folgende Einkleidung finden können:

„Ein regelmäßiges [sechsseitiges] Prisma ist an beiden Enden mit regelmäßigen [sechsseitigen] Pyramiden besetzt. Man soll untersuchen, wie sich bei gegebenem Querschnitt und Volumen die Höhen von Prisma und Pyramide verhalten."

Bei dieser Fassung fällt zunächst die Beschränkung auf das sechsseitige Prisma weg; die Aufgabe kann gerade so gut für Zylinder und Kegel gelten. Ist x die Höhe der Pyramide, y die des Prismas, so haben wir

$$Q\left(y + \frac{2}{3}x\right) = V \text{ oder } 2\,x + 3\,y = C.$$

Die Zahlen 2 und 3 sind absolute Konstanten der Aufgabe. Man sieht das lineare Gesetz, nach dem sich x und y bestimmen und die beiden Grenzfälle: für $x=0$ bleibt nur das Prisma, für $y=0$ nur die Doppelpyramide. Man könnte hier nun z. B. die Frage anschließen, in welchem Verhältnis bei festem Querschnitt x und y zueinander stehen müssen, wenn der Körper das genaue Modell eines Bergkristalls darstellen soll. Es käme dann als zweite Bedingungsgleichung hinzu

$$a : x = 10 : 11.$$

Wenn wir für a und V die oben angegebenen Werte 1,5 und 60 beibehalten, so ist $x = 1{,}65$ cm und

$$\frac{3 \cdot 1{,}5^2}{2} \sqrt{3} \left(y + \frac{2 \cdot 1{,}65}{3}\right) = 60.$$

Fügt man als zweite Bestimmungsgleichung aber die Bedingung hinzu, daß das Rechteck aus den beiden Höhen den Wert $xy = c$ haben soll, so führt das auf die quadratische Gleichung $2x + \frac{3c}{x} = C$ oder

$$x^2 - \frac{C}{2} x = -\frac{3c}{2}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung sind die Abszissen der Schnittpunkte einer Geraden mit einer gleichseitigen Hyperbel (Abbild. 12). Natürlich müssen die Konstanten so gewählt sein, daß man reelle Schnittpunkte erhält. Man sieht leicht, wie bei festem c durch Aenderung von C, d. h. Parallelverschiebung der Geraden drei verschiedene Fälle auftreten.

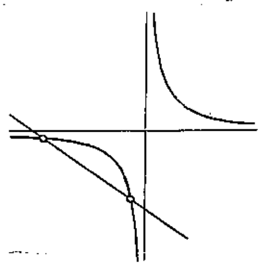

Fig. 12.

Verzichtet man bei Nummer 4 auf die kristallographische Einkleidung, so bleibt die Aufgabe, die fehlenden Halbachsen und die Horizontalkante sowie das Volumen der rhombischen Doppelpyramide zu berechnen. Es ist klar, daß ein Zahlenbeispiel hier ziemlich wertlos ist, und daß es vor allem darauf ankommt, mit Hilfe von homogenen Bestimmungsstücken stereometrisch interessante Ergebnisse abzuleiten.

Man wird also entweder von den drei Kanten oder von den drei Halbachsen ausgehen. Seien diese mit a, b, c, jene mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet (als halbe Flächendiagonalen des umschriebenen Quaders), so ist

$$d_1^2 = b^2 + c^2, \quad d_2^2 = a^2 + c^2, \quad d_3^2 = a^2 + b^2$$

oder

$$a^2 = d^2 - d_1^2, \quad b^2 = d^2 - d_2^2, \quad c^2 = d^2 - d_3^2,$$

wobei $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$

die halbe Körperdiagonale des Quaders bezeichnet.

Man kann die Oberfläche der Pyramide unmittelbar als Funktion der Kanten ausdrücken mit

$$O = \sqrt{s\,(s - d_1)\,(s - d_2)\,(s - d_3)},$$

den Inhalt als Funktion der Achsen mit $V = 4\,a\,b\,c : 3$. Es ist aber auch wünschenswert, die Oberfläche als Funktion der Achsen darzustellen; man gelangt dazu mit Hilfe einer der Höhen der Begrenzungsflächen und findet für die Einzelfläche

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2},$$

für die Gesamtoberfläche also

$$O = 4 \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

(Als Probe kann der Spezialfall des Oktaeders dienen, denn für $a = b = c$ geht die Formel über in $O = 4\,a^2 \sqrt{3}$). Für das Volumen wird man sich mit dem Ausdruck

$$V = \frac{4}{3} \sqrt{(d^2 - d_1^2)\,(d^2 - d_2^2)\,(d^2 - d_3^2)}$$

begnügen. Die Flächennormale n ergibt sich aus der Gleichung $V = n \cdot O : 3$ zu

$$n = \frac{3V}{O} = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}.$$

Ich glaube keinem Widerspruch zu begegnen, wenn ich derartige Uebungen für wertvoller erkläre als öde Rechnerei oder weit hergeholte, verzwickte Aufgaben. Wir können aber noch ein Stückchen weiter gehen und auch die sämtlichen Winkel der rhombischen Pyramide direkt oder indirekt als Funktionen der Kanten oder Achsen ausdrücken. Vieles geht einfach mit Hilfe ebener Dreiecke; bei der Bestimmung der Flächenwinkel werden wir rechtwinklige sphärische Dreiecke benützen. Ich brauche kaum zu betonen, daß es bei den vielen Stücken auch auf eine rationelle Bezeichnung ankommt, etwa von der Art, wie sie in der beigegebenen Fig. 13 durchgeführt ist.

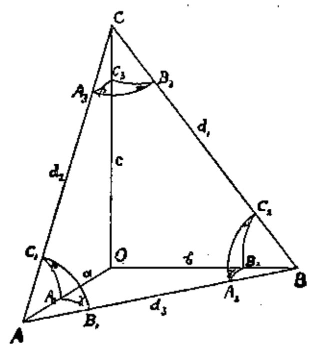

Fig. 13.

Wir kennen die Seite $A_1 B_1$ durch $\operatorname{tang} A_1 B_1 = \frac{b}{a}$, die Seite $A_1 C_1$ durch $\operatorname{tang} A_1 C_1 = \frac{c}{a}$; wir erhalten die Seite $B_1 C_1$ und die Winkel β und γ, also die halben Flächenwinkel an den Kanten d_2 und d_3 nach der Neperschen Regel aus

$$\cos B_1 C_1 = \cos A_1 B_1 \cdot \cos A_1 C_1 \text{ oder}$$

I. $$\cos B_1 C_1 = \frac{\operatorname{tg} A_1 B_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A_1 B_1}} \cdot \frac{\operatorname{tg} A_1 C_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A_1 C_1}},$$

d. h. $$\cos B_1 C_1 = \frac{b\,c}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a^2 + c^2}}$$

II. $$\cos \gamma = \operatorname{cotg} B_1 C_1 \cdot \operatorname{tang} A_1 B_1 = \frac{b}{a} \operatorname{cotg} B_1 C_1$$

III. $$\cos \beta = \operatorname{cotg} B_1 C_1 \operatorname{tang} A_1 C_1 = \frac{c}{a} \operatorname{cotg} B_1 C_1.$$

Analoge Formeln ergeben sich für die an den Achsen b und c liegenden sphärischen Dreiecke. Alle diese stereometrischen und trigonometrischen Aufgaben sind aber noch keine kristallographischen Aufgaben im engeren Sinn. Denn wir gehen hier von linearen Größen aus, um die Winkel zu berechnen, während wir in der Kristallographie von gemessenen Winkeln aus zur Berechnung von Streckenverhältnissen weiterschreiten.

Ich möchte nun einen weiteren Unterschied betonen, der zwar allgemein bekannt ist, aber leider wenig beherzigt wird — den Unterschied zwischen „wirklich praktischen“ und „fingiert praktischen“ Aufgaben. Eine Aufgabe ist strenggenommen nur dann eine wirklich kristallographische, physikalische, astronomische Aufgabe, wenn der Schüler genötigt ist, sei es auch mit den einfachsten Mitteln, sich die betreffenden Konstanten selbst zu verschaffen. Mögen die Ergebnisse der eigenen

Messungen noch so verbesserungsbedürftig sein, sie sind wenigstens durch ehrliche Arbeit gewonnen. Ehrliche Arbeit bildet die Grundlage all' unseres Wissens von der Natur; mit den Schwindelaufgaben der Aufgabensammlungen und den Ausgeburten verschulmeisterter Mathematikergehirne, die heute noch das Feld beherrschen, sollte allmählich aufgeräumt werden. Man komme nicht mit dem Einwand, zu praktischen Aufgaben in dem oben definierten Sinne habe die Schule keine Zeit und keine Mittel. Zur Ehrlichkeit kann man nie genug Zeit haben, und man wird reichlich Zeit haben, sobald man sich entschließt, den Plunder der fingierten Aufgaben über zehneckige Kirchtürme, über hölzerne Würfel, die mit kupfernen Pyramiden besetzt sind, über silberne Tetraeder, die ein Silberschmied zu rätselhaften Zwecken herstellen soll usw. usw., über Bord zu werfen. Die Mittel aber sind überall reichlich vorhanden, wenn wir nur einmal auch zur Einfachheit zurückkehren und das benützen wollen, was überall zur Hand ist oder ohne Mühe beschafft werden kann. Es muß ja kein kilogrammschwerer Bergkristall sein, jeder beliebige gemeine Quarz genügt zur Messung; man wird keine kostbaren und empfindlichen Schwefelkristalle den Händen ungeschickter Schüler anvertrauen, sondern irgend ein rhombisches Silikat oder sonst einen rhombischen Kristall zur Messung benützen, und wenn alle Stränge reißen, so hat man Holzmodelle oder selbstverfertigte Papiermodelle zur Verfügung. Zum Messen allerdings braucht man noch ein Anlegegoniometer. Man kann ein Penfieldsches kleines Goniometer schon für 2—3 M. beziehen; keine Anstalt würde sich damit arm kaufen, und vielleicht erleben wir es noch, daß die Mathematiker das Instrument sogar im stereometrischen Unterricht benützen. Ich weiß nicht, ob das an norddeutschen Anstalten geschieht; in meiner früheren Praxis bin ich immer auf ungläubiges Staunen gestoßen, wenn ich behauptete, daß ein Anlegegoniometer genau so notwendig zum stereometrischen Unterricht gehöre wie ein gewöhnlicher Winkelmesser zur Planimetrie.

Erst wenn einige Messungen wirklich gemacht und zu Berechnungen benützt sind, kann man genauere Werte aus Lehrbüchern weiteren Aufgaben zugrunde legen. Das fundamentale Prinzip der messenden Kristallographie muß jedem Primaner durch den Mathematikunterricht ebenso geläufig werden wie die Grundaufgaben der sphärischen Astronomie. Die Aufgaben finden ihren natürlichen Platz beim Uebergang von der Berechnung von Strecken, Flächen und Körperinhalten zur Benützung und Berechnung der sphärischen Dreiecke; sie können mit den verschiedenartigsten stereometrischen Aufgaben verknüpft werden und brauchen sich durchaus nicht einseitig auf die Fragen zu beschränken, die den Kristallographen vorwiegend interessieren. Es gibt in den mir bekannten Aufgabensammlungen — es mögen an zwei Dutzend sein — reichliche Beispiele über Oktaeder, Tetraeder, gelegentlich auch über Mittelkristalle, Rhomboeder u. dergl., aber wenig Aufgaben, die wirklich von kristallographischen Gesichtspunkten aus gegeben sind. Hier ist noch eine große Lücke auszufüllen. Das gilt besonders auch für Lehrbücher und Aufgabensammlungen über sphärische Trigonometrie; man kann die dicksten Werke durchblättern und findet kaum Spuren einer kristallographischen Fragestellung. Zu allem wird sich Zeit finden, sobald man auf jene Geschmacklosigkeiten und Phantasieaufgaben verzichtet, die sich bisher — Ausnahmen zugestanden — in den Sammlungen breitgemacht haben.