gänge zwischen den Stoffen zwangsläufig geleitet und gebändigt durch den kundigen Menschen, sie sehen keine Einzeltatsachen, sondern lebendig bewegte Wirklichkeit; die kaufmännischen Naturen sehen mit Staunen, wie sorgfältig der Betrieb alle Verluste vermeidet, wie er darauf ausgeht mit den geringsten Mitteln den größtmöglichen Erfolg zu erringen, wie durchweg das Bestreben herrscht, keinen Abfall entstehen zu lassen — die Eisenhochofenschlacken werden auf Zement verarbeitet, das Gas der Kokerei dient als Kraftgas, Heizgas und Leuchtgas, der Teer, die Teeröle und das Ammoniak sind Kostbarkeiten —; wem in der Seele der Keim zu volkswirtschaftlichem und politischem Denken schlummert, dem wird er zum Leben erweckt, und der schon Treibende findet einen fruchtbaren Nährboden, denn es ist in einem Werte schaffenden Betriebe unmittelbar ersichtlich, daß der Mensch ein Gemeinschaftswesen ist, einer auf den andern angewiesen, daß jegliche Arbeit nur dann von Erfolg gekrönt sein kann, wenn jeder einzelne aus der Gesamtheit auf seinem Posten, auch auf dem allerbescheidensten, mit unbedingter Zuverlässigkeit seine Pflicht erfüllt, daß für die mannigfach abgestuften Zweige der Verwaltung und Ausführung alles überschauende Führer vorhanden sein müssen, deren Verantwortung mit der Größe ihres Wirkungskreises und ihrer Machtbefugnis wächst, daß aber auch die niedersten Arbeiter in der allgemeinen Wertschätzung nicht zu bloßen Händen oder Maschinen herabsinken dürfen, wenn nicht eine Entwürdigung der Menschheit eintreten soll, daß zur Erhaltung der Gesundheit und zur Erleichterung der schweren Arbeit für alle Beteiligten hygienische Maßnahmen getroffen werden müssen, daß ein arbeitsgewohntes und arbeitsfreudiges Volk eine gewaltige Macht darstellt, und daß unsere Bodenschätze in richtiger Verwertung und unsere Industrie im innigen Zusammenhange mit der Wissenschaft Quellen des Reichtums sind. Den geistigen Anlagen entsprechend wird der Besuch eines Großbetriebes auf den einen mehr in dieser, auf den andern mehr in jener Richtung wirken, im ganzen wird der Erfolg einer vorzüglichen staatsbürgerlichen Belehrung gleichzusetzen sein, die eine wertvolle und wünschenswerte Ergänzung zur staatsbürgerlichen Erziehung in den Arbeitsgemeinschaften der Schule, besonders der Uebungssäle bildet.

Wenn heute stärker denn je der Ruf ertönt: Freie Bahn jedem Tüchtigen! so wird jeder Lehrer von neuem sich die Frage vorlegen, ob er seinen Unterricht so gestaltet, daß er den verschiedenartigen Anlagen seiner Schüler vollauf gerecht wird. Weil wir alle Menschen sind mit menschlichen Schwächen, so wird wohl überall etwas zu bessern sein.

Kristallographische Meßübungen und Rechenaufgaben.

Von Dr. Julius Ruska, a. o. Professor an der Universität Heidelberg.

Wer Gelegenheit hat, die Art und Weise, wie die Anfänge der Wissenschaften auf den Schulen gelehrt und ihre Anwendungen im Unterricht behandelt werden, mit der wirklichen Wissenschaft und Praxis zu vergleichen, wird fast überall die Beobachtung machen, daß die schulmäßige Behandlung Gefahr läuft, in Scholastik auszuarten, indem sie Dinge wichtig nimmt und breit tritt, die für den wissenschaftlichen Standpunkt, d. h. für die Erkenntnis der wesentlichen Zusammenhänge gleichgültig sind, indem sie an Auffassungen festhält und weiterbaut, die wissenschaftlich überwunden sind, indem sie Aufgaben stellt oder gar bevorzugt, die praktisch wertlos sind und von den wirklich wichtigen Fragen abführen. Besonders groß ist die Gefahr solcher Abwege, wenn es sich um Schulfächer mit alten Ueberlieferungen handelt, um methodische Verfahren, die von einer Generation zur andern bei Lehrern und Schülern weitergegeben werden. Aber auch dann ist der Fortschritt gehemmt, wenn ein Unterrichtsstoff ein Grenzgebiet darstellt, dem nur wenige Fachleute methodisches Interesse entgegenbringen. Es muß verarmen und verkümmern, wenn ihm nicht von der fortschreitenden Wissenschaft von Zeit zu Zeit neue Antriebe zukommen, oder wenn nicht methodische Besinnung auf die Grundaufgaben zu neuen Wegen der didaktischen Behandlung führt.

Als ich vor einiger Zeit an dieser Stelle meine kritischen Bemerkungen zu „kristallographischen" Aufgaben veröffentlichte, die in Aufgabensammlungen geboten werden*, leitete mich vor allem der Gedanke, solche Auswüchse der Scholastik zu bekämpfen und die Aufgaben auf den realen Boden zurückzuführen, den die Mineralogie und Kristallographie dem Mathematiker bereitstellt. Es schien mir wichtig und notwendig, der Zeitvergeudung entgegenzutreten, die darin besteht, daß man lieber Phantasieaufgaben ausheckt, als die wirklich vorkommenden, grundlegenden Aufgaben der Kristallographie behandelt. Auch wollte ich die Aufmerksamkeit auf ein Meßinstrument — das vereinfachte Anlegegoniometer — lenken, dessen Einführung in die Stereometrie bei der Ausmessung von Polyedern aller Art zu einer Fülle von wertvollen Aufgaben Gelegenheit gäbe. Ich hoffe diese Gedanken weiter zu fördern, wenn ich zeige, wie man in planmäßiger Verknüpfung von

* Ueber merkwürdige Mineralien und eine neue Methode der spezifischen Gewichtsbestimmung. Unterrichtsblätter 1916 Nr. 5. — Trotz wiederholter Korrekturvermerke ist Fig. 12 beim Druck des Aufsatzes verkehrt eingesetzt; ich bitte die Leser um Entlastung in diesem Punkte.

Messung und Rechnung eine Schulkristallographie aufbauen kann, die eher ein kleines Abbild der wirklichen Kristallbestimmung darstellt, als es das rein deduktive Lehrverfahren zu geben pflegt.

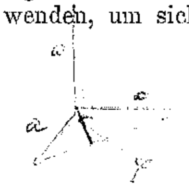
Wenn man, wie gewöhnlich, eine möglichst lückenlose Ableitung der Formenreihen der sechs oder sieben Kristallsysteme zur Hauptsache macht oder gar die neuere Systematik mit ihren 32 Symmetrieklassen der Darstellung zugrundelegt, so vergißt man über der mathematisch eleganten Deduktion zu sehr, daß die Kristallographie von Haus aus eine Erfahrungswissenschaft ist, daß erst zahllose immer wiederholte Messungen die empirischen Daten für die systematische Behandlung geliefert haben, und daß in *jedem konkreten Fall* immer wieder *Messungen* nötig sind, um die Lage und die Symbole der Flächen von gegebenen Kristallen zu bestimmen. Es ist aber sehr wohl ein Unterrichtsgang durchführbar, bei dem das Schwergewicht auf der Messung und Berechnung der kristallographischen Elemente liegt und die Systematik erst am Schluß als Zusammenfassung der Ergebnisse erscheint. Mindestens sollte die geometrische Kristallographie soweit mit praktischer, messender Kristallographie durchsetzt sein, daß die Schüler erkennen, wieviel mehr es auf diese Messungen ankommt, als auf allgemeine Betrachtungen.

Schon die Definition der Kristallsysteme durch ihre kristallographischen Elemente gibt Gelegenheit, auf diese Ergänzung von Theorie und Praxis hinzuarbeiten. Ist der auf dem allgemeinen Gesetz des Kristallwachstums beruhende *Grundsatz* im sichern Besitz der Schüler, daß nicht nur alle geometrisch ähnlichen, sondern auch die durch Parallelverschiebung von Flächen aus ihnen hervorgehenden Körper als kristallographisch identisch zu gelten haben — er muß natürlich durch Beispiele, etwa verschieden große oder verzerrte Alaun- und Granatkristalle, Quarze und Steinsalzspaltstücke veranschaulicht und physikalisch erläutert sein — so kann man natürliche Kristalle und Holz- oder Pappmodelle nebeneinander verwenden. Die Natur bietet uns kein System, sondern Einzelformen und Kombinationen, die wir nach ihren mehr oder weniger übereinstimmenden Symmetrieeigenschaften rein empirisch in Gruppen bringen können. Eine kleine Auswahl von rundum ausgebildeten Kristallen von Alaun, Flußspat, Schwefelkies, Granat, Zirkon, Kalkspat, Quarz, Schwefel, Schwerspat, Gips, Augit, Kupfervitriol usw. in Verbindung mit geeigneten großen Pappmodellen führt die wichtigsten Gruppen vor Augen: asymmetrische, einfach, dreifach, fünffach, siebenfach, neunfach symmetrische Körper. Wir konstruieren uns leicht für fünf dieser Gruppen die zugehörigen *Elementarkörper*, das asymmetrische und monosymmetrische Parallelflach, den Quader, das quadratische Prisma, den Würfel, für zwei andere das hexagonale Prisma und das Rhomboeder. Der strenge Nachweis, daß hievon wesentlich verschiedene Fälle nicht vorkommen und nicht vorkommen können, überschreitet die der Schule gesteckten Grenzen. Die Vergleichung der Grundkörper zeigt, daß die Zahl der willkürlichen Bestimmungselemente umso kleiner wird, je mehr die Symmetrie zunimmt. Der Würfel ist schon durch seine Definition bestimmt, das quadratische, trigonale, hexagonale Prisma durch ein Streckenverhältnis, das Rhomboeder durch einen Winkel, der Quader durch zwei Streckenverhältnisse, die schiefen Parallelflache außerdem durch einen oder drei Winkel. Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß jedes Streckenverhältnis auch durch Winkel, jeder Winkel durch geeignete Streckenverhältnisse ersetzbar ist, das Streckenverhältnis des hexagonalen Prismas z. B. durch den Winkel der Diagonalen auf der Prismenfläche, der Winkel des Rhomboeders durch das Verhältnis der Kante zur Achse oder durch das Verhältnis der Flächendiagonalen. Könnten wir die Abstände der Kristallmolekel selbst unmittelbar beobachten und ausmessen, so würden sie uns zugleich den einfachsten Ausdruck für den Kristallbau liefern. Wären die Kristallformen nach allen Richtungen gleiche Vielfache der Elementarkörper, so könnten Kantenlängen zur Grundlage der Kristallbestimmung dienen. Die Willkür in den Abmessungen der prismatischen Körper zwingt aber bekanntlich zur Benützung von Grundformen und Kombinationen, bei denen *Winkel* gemessen werden können, und so kommen wir zur *ersten Gruppe* von kristallographischen Aufgaben.

I.

Man soll durch Winkelmessung an einfachen Formen oder Kombinationen die kristallographischen Konstanten eines gegebenen Minerals bestimmen.

Wir beginnen mit Beispielen aus dem *regulären* System. Es könnte scheinen, als ob hier überhaupt keine Messung vorzunehmen wäre. Aber woher wissen wir, daß der Alaun regulär kristallisiert, wenn nicht aus der Beobachtung, daß alle 12 Flächenwinkel der oktaederartigen Kristalle *tatsächlich* einander gleich sind und dem theoretisch für das reguläre Oktaeder gefundenen Wert $2\,\varphi = 109^{0}\,28'$ entsprechen? Wir werden also die erste Meßübung gerade zu diesem Nachweis benützen. Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man den Oktaederwinkel $2\,\varphi$ auf Karton konstruiert und mit scharfem Messer ausschneidet (Fig. 1). Die schmalen Dodekaederflächen, die an größeren Alaunkristallen die Stelle der Kanten einnehmen, stören nicht beim Anlegen. Man kann dasselbe Verfahren auch anwenden, um sich davon zu überzeugen, daß alle



Flächenwinkel des Rhombendodekaeders 120^0 messen, oder daß die Spaltflächen an den Ecken von Flußspatwürfeln dem Oktaeder angehören (der feste Winkel an der Kombinationskante ist $180^0 - \varphi = 125^0\,16'$).

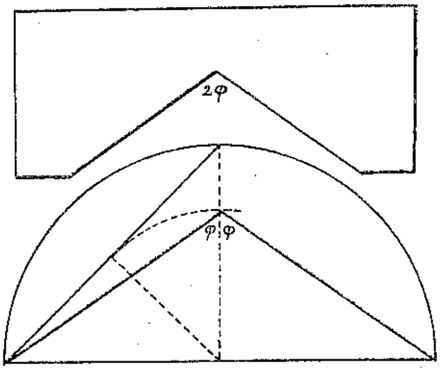


Fig. 1.

Der Substanz eigene kristallographische Konstanten sind erst vom quadratischen System an zu bestimmen. Es ist zu betonen, daß jedes Streckenverhältnis und jeder Winkel die pyramidale oder rhomboedrische Grundform eines im quadratischen oder im hexagonalen System kristallisierenden Körpers geometrisch bestimmt, und daß nur praktische Gründe maßgebend sind, wenn man als kristallographische Konstante das Verhältnis der Achsenlängen (oder mit $a = 1$ die Länge c der Hauptachse) benützt. Zu seiner Bestimmung genügt es, den Winkel 2φ an den Mittelkanten einer Pyramide erster Art oder die Winkel $180^0 - \varphi$ bezw. $90^0 + \varphi$ an den Kombinationskanten mit Basis und Prisma zu messen; auch kann man einen aus allen diesen Werten gewonnenen mittleren Wert zugrunde legen. Eine einfache Ueberlegung ergibt $c = \operatorname{tg}\varphi : \sqrt{2}$. Kann man den Winkel 2ψ an der Mittelkante einer Pyramide zweiter Art messen, so ist noch einfacher $c = \operatorname{tg}\psi$. Zur Berechnung des Achsenverhältnisses aus Polkantenwinkeln benützt man rechtwinklig sphärische Dreiecke.

Beispiel 1.

An einem pyramidalen Kristall von Scheelit sei der Winkel an den Mittelkanten aus einer Reihe von Messungen zu $130^0\,30'$ gefunden; welches ist das Achsenverhältnis des Minerals?

Wir finden $c = \operatorname{tg}\varphi : \sqrt{2}$ mit $\varphi = 65^0\,15'$.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}\varphi &= 10.3363 \\ \log \sqrt{2} &= 0.1505 \\ \hline \log c &= 0.1858, \quad \underline{c = 1.534.} \end{aligned}$$

Die genaueren Werte sind nach dem Lehrbuch der Mineralogie von Klockmann $2\varphi = 130^0\,33'$ und $c = 1.5356$.

Beispiel 2.

Ein tafelförmiger Kristall von Wulfenit (Fig. 2) zeigt die Kombination einer quadratischen Pyramide mit der Endfläche. Man findet als Mittelwert aus den Messungen des Mittelkantenwinkels $2\varphi = 73.4^0$ oder $\varphi = 36.7^0$; aus Kontrollmessungen des stumpfen Winkels an der Kombinationskante $180^0 - \varphi = 143.4^0$ oder $\varphi = 36.6^0$. Wegen der größeren Unsicherheit des stumpfen Winkels nimmt man das Mittel aus 2φ der ersten und φ der zweiten Messung und erhält $\varphi = 36^0\,40'$. Wie groß ist der Wert der Hauptachse?

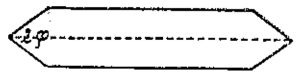


Fig. 2.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}\,36^0\,40' &= 9.8718 \\ \log \sqrt{2} &= 0.1505 \\ \hline \log c &= 9.7213, \quad \underline{c = 0.5264.} \end{aligned}$$

Nach Klockmann ist $c = 1{,}577$. Die Vergleichung zeigt, daß das berechnete c rund $1/3$ des wahren Wertes ist. Also war die beobachtete Pyramide nicht die Grundpyramide, sondern die stumpfere Pyramide (113).

Beispiel 3.

An einem Kristall von Zinnstein, Kombination von Pyramide und Prisma, hat man den Winkel an der Kombinationskante zu $133^0\,30'$ gefunden. Man soll das Achsenverhältnis berechnen und ein Modell des Kristalls herstellen.

Der gemessene Winkel ist $90^0 + \varphi$, also ist $\varphi = 43^0\,30'$. Daraus wie vorher $c = 0{,}67$. Zur Herstellung des Modellnetzes müssen die Pyramidenkanten gegeben sein. Die Basiskante m ist $\sqrt{2} = 1.414$; die Polkante findet man aus $p = \sqrt{1 + c^2}$ zu $p = \sqrt{1.4489} = 1.2037$. Man zeichnet über und unter einem Rechteck, das den Prismenmantel darstellt, je vier gleichschenklige, durch das Streckenverhältnis $m : p$ bestimmte Dreiecke und klebt das Netz zusammen; die Länge der Prismenkante ist natürlich beliebig (Fig. 3).

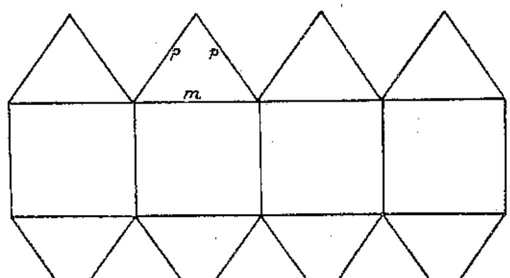


Fig. 3.

Beispiel 4.

An einem Kristall von Apophyllit (Fig. 4), Kombination der Grundpyramide mit dem Prisma zweiter Stellung, ist der Polkantenwinkel 2ϑ

mit 104° gefunden. Man soll das Achsenverhältnis, den Mittelkantenwinkel φ, den spitzen Winkel 2γ der rhombischen Pyramidenflächen und den Winkel μ an der Kombinationskante mit dem Prisma berechnen.

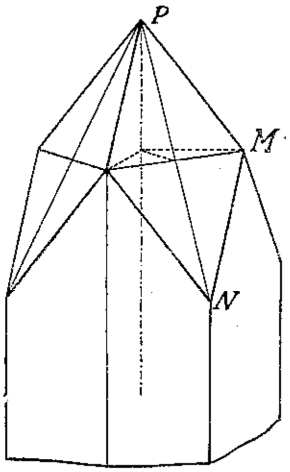


Fig. 4.

Man hat für die ersten drei Größen die Wahl zwischen zwei rechtwinklig sphärischen Dreiecken. Legt man eine Kugel um die Spitze P, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck zwischen Pyramidenfläche und Nebensymmetrieebene erster und zweiter Art (Fig. 5); man kennt die Winkel $A = \vartheta$ und $B = 45^0$ und berechnet

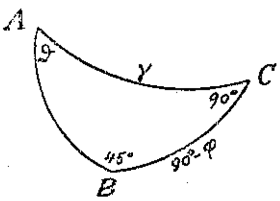


Fig. 5.

c aus: $\cos AB = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{cotg} 45^0$

$$\log \cos AB = 9.8928$$
$$AB = 38^0\,37'$$
$$\log c = \log \operatorname{cotg} 38^0\,37' = 0.09758,$$
$$\underline{c = 1.252.}$$

φ aus: $\cos 45^0 = \operatorname{cotg} AB \operatorname{tg} (90^0 - \varphi)$ oder

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos 45^0 : \operatorname{cotg} AB$$
$$\log \cos 45^0 = 9.8495$$
$$\log \operatorname{cotg} AB = 0.0976$$
$$\log \cos \varphi = 9.7519$$
$$\varphi = 60^0\,32',\ \underline{2\varphi = 121^0\,(4').}$$

γ aus: $\sin \gamma = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{cotg} \varphi$

$$\log \operatorname{cotg} \vartheta = 9.8928$$
$$\log \operatorname{cotg} \varphi = 9.7519$$
$$\log \sin \gamma = 9.6447,\ \gamma = 26^0\,10',\ \underline{2\gamma = 52^0\,22'.}$$

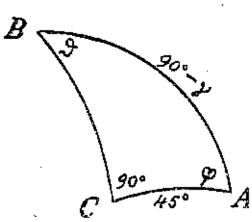


Fig. 6.

Legt man das Dreieck bei M in den Raum zwischen der Pyramidenfläche, Nebensymmetrieebene erster Art und Parallelebene zur Hauptsymmetrieebene (Fig. 6), so kennt man ϑ und die diesem Winkel gegenüberliegende Seite $AC = 45^0$; man findet leicht

c aus: $\sin BC = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{tang} 45^0$

$$\log \sin BC = 9.8928$$
$$BC = 51^0\,23'$$

$c = \operatorname{tang} BC = \operatorname{cotg} (90^0 - BC) = \operatorname{cotg} 38^0\,37'$ wie oben.

φ aus: $\cos 45^0 = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tang} BC$ oder

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos 45^0 \operatorname{cotg} BC$$

$90^0 - \gamma$ aus: $\cos AB = \cos BC \cos 45^0$

$$\log \cos BC = 9.7953$$
$$\log \cos 45^0 = 9.8495$$
$$\log \cos AB = 9.6448$$

$AB = 90^0 - \gamma$, also $\log \cos AB = \log \sin \gamma$ wie oben.

Auch zur Bestimmung des Winkels μ an der Kombinationskante stehen zwei Wege frei, je nachdem man zur Bildung der rechtwinkligen Ecke außer der Prismen- und Kombinationskante noch die lange Diagonale der rhombischen Pyramidenfläche oder die vertikale Symmetrielinie der Prismenfläche hinzunimmt.

Im ersten Fall liegt der Scheitel der Ecke am spitzen Winkel N des Rhombus (Fig. 7), im zweiten am stumpfen Winkel M; die Bestimmungsgleichung für μ ist

für I:

$$\cos 45^0 = \sin \mu \cos \gamma,$$

für II:

$$\cos \mu = \operatorname{cotg} (180^0 - 2\gamma) \operatorname{tang} 45^0.$$

Fig. 7.

Aus der zweiten Gleichung folgt wegen des stumpfen Winkels $180^0 - 2\gamma$ ein negativer Wert für $\cos \mu$. Auch die unmittelbare Anschauung lehrt, daß μ ein stumpfer Winkel sein muß; der errechnete Wert kann mit dem Anlegegoniometer nachgeprüft werden.

Beispiel 5.

Der Polkantenwinkel am Spaltungsrhomboeder R des Kalkspats beträgt $105^0\,5'$; man soll das Achsenverhältnis und die übrigen Dimensionen des Rhomboeders bestimmen.

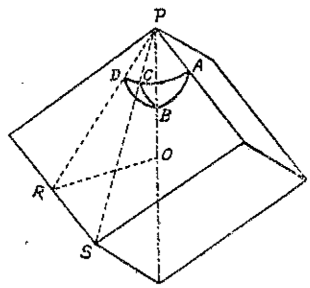


Fig 8.

Man berechnet zunächst die Neigung der Diagonale PS gegen die Hauptachse (Fig. 8) aus dem Dreieck ABC, in welchem $\sphericalangle A = \frac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle C = 90^0$, $\sphericalangle B = 60^0$.

Es ist

$$\cos A = \sin B \cos BC \text{ oder}$$
$$\cos 52^0\,32.5' = \sin 60^0 \cos BC$$
$$\log \cos 52^0\,32.5' = 9.7840$$
$$\log \sin 60^0 = 9.9375$$
$$\log \cos BC = 9.8465;\ BC = 45^0\,23'.$$

Um zum Achsenverhältnis $PO : OR$ zu gelangen, benützen wir das benachbarte Dreieck BCD, das in C ebenfalls rechtwinklig ist und bei B einen Winkel von 30^0 hat.

Wir erhalten BD aus der Gleichung

$$\cos B = \operatorname{tang} BC \cdot \operatorname{cotg} BD, \text{ also}$$
$$\operatorname{cotg} BD = \cos 30^0 \operatorname{cotg} 45^0\,23'$$

und finden $\operatorname{cotg} BD = 0.8543$. Dieser Wert ist, wie die Figur zeigt, das Achsenverhältnis $PO : RO$. Wie man die Kante, die Diagonalen und die Fläche der Rhomben oder den Inhalt des Rhomboeders bestimmt, bedarf keiner Erörterung.

Zur kristallographischen Bestimmung rhombischer Kristalle sind zwei unabhängige Messungen erforderlich, denn das Achsenverhältnis $a : b : c$ enthält zwei unabhängige Größen a und c (für $b = 1$). Aus Kombinationen, die das Hauptprisma enthalten, ergibt sich a, aus solchen, die das Längsprisma enthalten, c unmittelbar als Tangente des halben Prismenwinkels. Das Querprisma liefert $a : c$, ist also erst zu brauchen, wenn der absolute Wert von a oder c bereits feststeht. Kristalle mit herrschender Pyramide, an denen gleichzeitig drei Winkel gemessen werden können — der dritte zur Kontrolle der beiden andern — sind bekanntlich selten. Insbesondere ist abzuraten, die höchst empfindlichen Schwefelkristalle warmen Schülerhänden anzuvertrauen; hier mögen die aus dem Lehrbuch genommenen Werte zu Rechenübungen benützt werden.

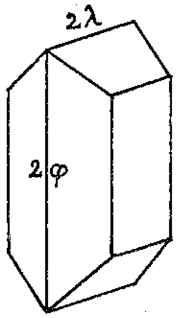


Fig. 9.

Beispiel 6.

An einem Kristall von Aragonit (Fig. 9), gewöhnliche Kombination (110) (011) (010), wurde der Prismenwinkel 2φ zu $116^0\,10'$, der Winkel des Längsprismas 2λ zu $108^0\,30'$ bestimmt; wie groß sind a und c?

Man findet

$$a = \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg} 58^0\,5' = 0.623;$$
$$c = \operatorname{cotg}\lambda = \operatorname{cotg} 54^0\,15' = 0.720.$$

Bei der Messung wird man nicht nur die beiden Prismenwinkel, sondern auch die vier Winkel an den Kombinationskanten mit (010) berücksichtigen und aus allen guten Messungen das Mittel nehmen.

Beispiel 7.

Ein Topas, Kombination des Prismas mit einem Brachyprisma und der Grundpyramide, zeigte an den Polkanten die Winkel 141^0 (über a) und 102^0 (über b), an der Kombinationskante mit dem Prisma $135^0\,35'$, am Prisma vorn $124^0\,20'$. Man soll a und c auf doppelte Art berechnen und die Ergebnisse mit den genauen Werten $a = 0.5285$ und $c = 0.4769$ vergleichen.

Man kann a und b berechnen, indem man die rechtwinklige Ecke mit den Winkeln $70^0\,30'$ und 51^0 benützt, die im Scheitel der Pyramide von den Symmetrieebenen und der Pyramidenfläche gebildet wird, oder man benützt für a den halben Prismenwinkel $62^0\,10'$ und für c den Winkel an der Mittelkante $135^0\,35' - 90^0 = 45^0\,35'$.

Schwieriger gestalten sich die Verhältnisse im monoklinen und triklinen System. Denn es wird kaum noch möglich sein, Kristallkombinationen vorzulegen, an denen alle drei oder fünf kristallographischen Grundelemente leicht zu gewinnen sind. War beim rhombischen System ein allzu willkürliches Verfahren durch die dreifache Symmetrie unter Berücksichtigung der Kristalltracht ausgeschlossen, so läßt sich bei den monosymmetrischen und asymmetrischen Kombinationen die Unbestimmtheit der Grundelemente nur noch durch die Rücksicht auf die Kristalltracht einschränken. Hätten wir es mit Körpern zu tun, die durch Strecken bestimmt werden, so läge es am nächsten, die Kombination der Pinakoide als Grundform zu nehmen; zu dem Verhältnis $a : b : c$ würde dann im monoklinen System der Winkel β, im triklinen außerdem α und γ hinzutreten. Statt dessen muß (nach Festlegung der drei Pinakoide durch die Winkel α, β, γ des Koordinatensystems) das Längenverhältnis der Achsen durch die Lage einer alle Achsen schneidenden Pyramidenfläche oder durch das „Grundtetraeder", d. h. durch weitere zwei Winkel bestimmt werden; praktisch können auch zwei unabhängige Prismenflächen ihre Stelle vertreten. Es ist klar, daß diese Aufgaben vielfach oder ausschließlich auf schiefwinklige sphärische Dreiecke führen, und daß die Durchführung einer größeren Zahl solcher Aufgaben an ihrer Schwierigkeit und Umständlichkeit scheitert. Es kommt aber, wenn wir das Prinzip der kristallographischen Meß- und Rechenarbeit erläutern wollen, nicht so sehr darauf an — wie es leider oft der Ehrgeiz der Mathematiker ist — wenige recht schwere Aufgaben zu lösen, sondern Aufgaben von geringer und mittlerer Schwierigkeit in möglichst großer Auswahl darzubieten. Ich schließe den Abschnitt daher mit drei weiteren einfachen Beispielen.

Beispiel 8.

An einem Adular, Kombination von Prisma und schiefer Endfläche, ist der Prismenwinkel $2A$ an der Vorderkante mit $118^0\,50'$ und der stumpfe Winkel B an der Kombinationskante vorn oben mit $112^0\,13'$ gemessen. Man soll daraus den Neigungswinkel β der schiefen Achse bestimmen.

Das Dreieck ACB (Fig. 10) ist bei C rechtwinklig, die dem stumpfen Winkel B gegenüberliegende Kathete AC ist gleichfalls stumpfwinklig. Wir können das Dreieck durch ein Supplementardreieck DBC ersetzen, in welchem $\sphericalangle CBD = 67^0\,47'$ und $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 59^0\,25'$; dann erhalten wir den Supplementwinkel x von β durch die Gleichung

$$\cos 67^0\,47' = \sin 59^0\,25' \cos x$$

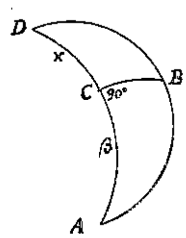


Fig. 10.

mit $x = 63^0\,57'$; der stumpfe Achsenwinkel β ist daher $= 116^0\,3'$.

Beispiel 9.

Man soll für den Adular des Beispiels 8 die zur Herstellung eines Netzes erforderlichen Winkel berechnen.

Wir brauchen je einen Winkel für die Seitenflächen und für die Endfläche. Benützen wir das Dreieck DBC der vorigen Aufgabe, so ist die Seite BD der spitze Winkel der Prismenflächen, BC der halbe stumpfe Winkel der rhombischen Endfläche.

Beispiel 10.

An einem Gipskristall, der die Kombination von Prisma, negativer Pyramide und Längsfläche darstellt, ist der Winkel $2C = 143^0\,30'$ der Pyramide und der Winkel $2A = 111^0\,30'$ des Prismas gemessen worden; man soll daraus die Achsenlängen bestimmen.

Die Aufgabe ist unvollständig; man muß auch den Achsenwinkel β kennen, den man zu rund 99^0 dem Lehrbuch entnimmt. Man erhält aus den gemessenen Winkeln nicht a und c, sondern ihre Projektionen a' und c', aus denen die Werte a und c gefunden werden können.

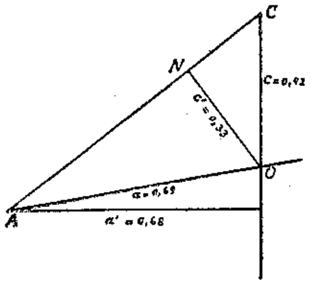


Fig. 11.

Nach der Zeichnung (Fig. 11) ist

$$a' : b = \text{cotg}\, A, \text{ also}$$
$$\log a' = \log \text{cotg}\; 55^0\,45' = 9.8331;$$
$$a' = 0.681.$$

Der Winkel zwischen a und a' ist 9^0, also ist

$$a = a' : \cos 9^0$$
$$\begin{array}{ll} \log a' & = 9.8331 \\ \log \cos 9^0 & = 9.9946 \\ \hline \log a & = 9.8385; \quad a = 0.6894. \end{array}$$

Ebenso ist

$$c' : b = \text{cotg}\, C, \text{ also}$$
$$\log c' = \log \text{cotg}\; 11^0\,45' = 9.5182;$$
$$c' = 0.3297.$$

Aus a und c' finden wir den Winkel AON zu $61^0\,25.5'$ und danach den Winkel NOC zu $37^0\,3.55'$; hieraus endlich c mittels der Gleichung

$$c' : c = \cos NOC \text{ oder } c = c' : \cos NOC.$$
$$\begin{array}{ll} \log c' & = 9.5182 \\ \log \cos NOC & = 9.8989 \\ \hline \log c & = 9.6193; \quad c = 0.4162. \end{array}$$

Wir finden also beim Gips $a : b : c = 0.6894 : 1 : 0.4162$; die genauen Werte sind nach Klockmann $a = 0.6896$ und $c = 0.4133$ mit $\beta = 98^0\,58'$.

II.

Das Gebiet der Aufgaben erweitert sich wesentlich, wenn die Grundelemente gefunden sind oder als gegeben in die Rechnung eingehen, und die Messungen den Zweck haben, die Symbole abgeleiteter Formen zu finden. Eine solche Aufgabe einfachster Art bot schon das zweite Beispiel; dankbaren Uebungsstoff kann man aber besonders aus den abgeleiteten Formen des regulären Systems gewinnen. Zwei Beispiele mögen das Verfahren veranschaulichen.

Beispiel 11.

An einem Flußspatkristall sind die Kanten des Würfels durch die Flächen eines Pyramidenwürfels zugeschärft. Die Messung ergibt einen Winkel $\varepsilon = 157^0\,20'$; welcher Pyramidenwürfel tritt in der Kombination auf?

Man hat festzustellen, in welchem Verhältnis eine Fläche des Pyramidenwürfels die Achsen schneidet. Die Aufgabe kann ohne weiteres bei genauer Zeichnung des Winkels durch Konstruktion gelöst werden (Fig. 12); die Rechnung ergibt

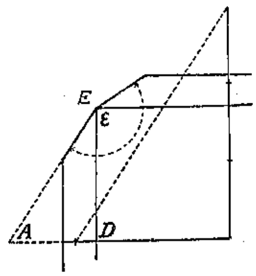


Fig. 12.

$$n = ED : AD = \text{cotg}\,\frac{\varepsilon - 90^0}{2}.$$ In unserm Fall ist $n = \text{cotg}\; 33^0\,40' = 1.503 \sim \frac{3}{2}$; es liegt also die Form $\infty O \frac{3}{2}$ nach Naumanns Bezeichnung oder (320) nach Miller vor.

Beispiel 12.

Man soll das Symbol des am Granat häufig für sich allein oder in Kombination mit dem Rhombendodekaeder auftretenden Ikositetraeders aus dem Winkel an den längeren Kanten berechnen, der zu $131^0\,50'$ bestimmt wurde (Fig. 13).

Man legt ein sphärisches Dreieck an eine der Ecken, von denen vier lange Kanten ausgehen. Der Parameter m ist die Tangente des Winkels PAQ oder $C'AO$. Wir benützen die Gleichung $\sin PQ = \text{cotg}\, P\; \text{tg}\; QR$, die sich wegen $PQ = QR$ auf $\cos PQ = \text{cotg}\, P$ reduziert.

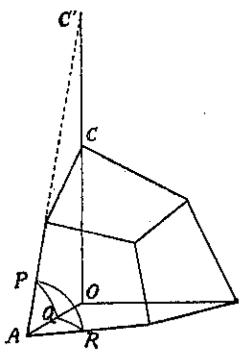


Fig. 13.

$$\cos PQ = \text{cotg}\; 65^0\,55' = 0.447$$
$$PQ = 63^0\,27'.$$

$m = \text{tang}\; PQ = 2$; das Ikositetraeder ist (211). Auch aus dem Winkel an den kurzen Kanten läßt sich das Symbol bestimmen, aber die Rechnung erfordert zwei Dreiecke.

III.

Schon in den bisher behandelten Aufgaben sind gelegentlich Fragen gestellt, die über das den Mineralogen Interessierende hinausgehen. Die Auswahl der Beispiele wird unermeßlich groß, sobald man die Bestimmung von ebenen Winkeln und Kantenlängen, Oberflächen und Rauminhalten hinzunimmt oder die gegebenen Stücke nicht auf Flächenwinkel beschränkt. Man kann natürlich auch fragen, welche Winkel, Kantenlängen usw. eine gegebene Form, etwa ein Hexakisoktaeder (321) oder eine biquadratische Pyramide oder ein bestimmtes Skalenoeder des Kalkspats besitzt, man kann Lage und Länge von Kombinationskanten unter bestimmten Bedingungen berechnen, man kann insbesondere die zur Zeichnung von Kristallnetzen erforderlichen Winkelberechnungen ausführen lassen. Damit entfernt man sich aber mehr und mehr von dem, was für die Kristallographie selbst wichtig ist, und ich verzichte aus diesem Grunde auf die Anführung weiterer Beispiele.

Für die Rechnung genügen vierstellige Logarithmen durchaus; auch wenn man die durch Messung gefundenen, bis zu 1^0 fehlerhaften Werte durch die Angaben der Lehrbücher ersetzt, braucht man keine genaueren Tafeln. Der Grundsatz, nicht mit mehr Stellen zu rechnen, als es die Beschaffenheit der gegebenen Stücke erfordert, ist ja endlich Gemeingut des mathematischen Unterrichts geworden — oder sollte es wenigstens geworden sein. Neben der Rechnung sollte auch womöglich eine sorgfältige Konstruktion der gesuchten Stücke ausgeführt werden. Wird sie groß genug und mit genauen Maßen ausgeführt, so kann sie jederzeit zur Kontrolle der Rechnungsergebnisse dienen; den Wert des kristallographischen Zeichnens für die Ausbildung der Raumanschauung brauche ich nicht weiter hervorzuheben, nachdem ich dieser Seite der Frage im Jahrgang 1916 von „Aus der Natur“ eine längere Abhandlung (Ueber die Darstellungsmittel der Kristallographie und ihre Anwendung im geometrischen Unterricht, S. 449, 512, 564, 617) gewidmet habe.

Der Fortschritt, den die wissenschaftliche Kristallographie durch Einführung des Reflexionsgoniometers an Stelle des einfachen Anlegegoniometers gemacht hat, betrifft nur die größere Zuverlässigkeit und Sicherheit der Messungen. Die „trigonometrische Methode“ der Berechnung der Flächen ist im wesentlichen dieselbe geblieben, und ist wenigstens in den Grundzügen durch die oben angeführten Beispiele dargestellt. Einen Fortschritt von prinzipieller Bedeutung brachte erst die zweikreisige Messung, welche die Lage der Flächen unmittelbar durch die Koordinaten der Flächennormalen darstellt, durch weitgehende Verwendung graphischer Methoden das Rechenwerk vereinfacht und die Feststellung bekannter Formen mit Hilfe von Tabellenwerken (vgl. Goldschmidt, Index der Kristallformen usw.) erleichtert. Die Kristallographie hat sich dadurch vollkommen der Astronomie angepaßt; denn wie diese die Oerter der Sterne an der Himmelskugel durch Länge und Breite oder andere sphärische Koordinaten bestimmt, so gibt der Kristallograph mit Hilfe der Winkel φ und ϱ die Durchstoßpunkte der Flächennormalen auf einer um den Kristall gedachten Einheitskugel an. Vielleicht findet sich Gelegenheit, auch über die schulmäßige Behandlung dieser neuen Methoden einmal in diesen Blättern zu reden.

Rationale Punkte und rationale Sehnen für Kegelschnitte.

Von Prof. Dr. E. Haentzschel (Berlin).

Gern pflegt man bei Aufgaben aus der analytischen Geometrie für die gegebenen Größen einfache Zahlenwerte, ganz besonders rationale, zu wählen; aber auch für das Ergebnis wird ein gleiches erstrebt. Im folgenden will ich nach dieser Richtung hin einige Formeln mitteilen, die man beim Stellen von Aufgaben sicherlich mit Erfolg wird verwenden können. Der Kürze wegen soll von einer rationalen Strecke gesprochen werden, wenn ihre Maßzahl eine rationale Zahl ist; ein rationaler Punkt hat Koordinaten mit rationalen Maßzahlen; endlich ist ein pythagoreischer Winkel ε ein solcher, der einem pythagoreischen Dreieck mit den Seiten $2pq, p^2-q^2, p^2+q^2$, wo p und q rationale Zahlenparameter sind, entnommen ist.

Man kann den folgenden Satz aussprechen:

Macht man einen rationalen Punkt P_1 auf dem Umfange eines Kegelschnitts zum Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, von dem jeder Strahl die Hauptachse unter einem pythagoreischen Winkel ε schneidet, so verläßt jeder Strahl den Kegelschnitt in einem rationalen Punkte P_2, auch ist die Sehne $s = P_1 P_2$ rational, und ebenso sind es ihre beiden Abschnitte $P_1 E$ und $P_2 E$, in welche sie durch die Hauptachse geteilt wird.

Der Beweis ist elementar; ich gebe deshalb für jeden Kegelschnitt nur den Ausgangspunkt und das Ergebnis an.

A) Die Parabel

$$y^2 = 2px$$

enthält den Punkt P_1:

$$x_1 = \frac{p}{2}\lambda^2;\quad y_1 = \pm p\lambda.$$

Von ihm geht der Strahl $P_1 - E - P_2$ aus:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\varepsilon\,(x - x_1).$$

Der Punkt P_2 hat die Koordinaten:

$$x_2 = \frac{p}{2}(\lambda \mp 2\operatorname{cotg}\varepsilon)^2,$$

$$y_2 = \mp p(\lambda \mp 2\operatorname{cotg}\varepsilon).$$

Die Sehne $P_1 P_2$ ist

$$s = \pm\frac{2p(\lambda \mp \operatorname{cotg}\varepsilon)}{\sin\varepsilon}.$$